Supplémentaire orthogonal et somme directe

3.3.16 Définition

Soient F et G deux sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $F \cap G = \{0\}$ et tout élément $x \in E$ peut s'écrire de façons unique sous la forme $x = y + z$ pour un certain $y \in F$ et $z \in G$. Dans ce cas on dit que E est la somme directe algébrique de F et G. On écrit $E = F \oplus G$.

Si E est un espace préhilbertien, on dit que E est la somme directe orthogonale de F et G si $E = F \oplus G$ et $G = F^{\perp}$.
Dans ce cas, G est le supplémentaire orthogonal de F.

3.3.17 Remarque

Soit F un sous-espace vectoriel complet de l'espace préhilbertien E. Alors pour tout $x \in E$, d'après le théorème de la projection hilbertienne, la projection orthogonale $P_F(x)$ de x sur F est l'unique élément de F tel que $(x - P_F(x)) \in F^{\perp}$ (voir 3.3.8).

3.3.18 Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel **complet** de l'espace préhilbertien E. Alors :

(i) La projection orthogonale $P_F : E \to F$ est une application linéaire continue. Si $F \neq \{0\}$, alors $\|P_F\| = 1$.

(ii) E est la somme directe orthogonale de F et $F^{\perp}$ i.e. $E = F \oplus F^{\perp}$.

(iii) $F^{\perp} = \ker P_F$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration: (i) D'après le théorème de la projection hilbertienne, P_F est bien définie et $\forall x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a : $(x - P_F(x)) \in F^{\perp}$ et $(y - P_F(y)) \in F^{\perp}$ d'où

$$(x + y - P_F(x) - P_F(x)) \in F^{\perp} \text{ donc } P_F(x + y) = P_F(x) + P_F(x)$$
$$\lambda x - \lambda P_F(x) = \lambda(x - P_F(x)) \in F^{\perp} \text{ donc } P_F(\lambda x) = \lambda P_F(x)$$

d'où la linéarité de P_F.
Comme, P_F est contractante, on a $\|P_F(x)\| = \|P_F(x) - P_F(0)\| \leq \|x\|$, pour tout $x \in E$, d'où $\|P_F\| \leq 1$ d'où, la continuité de P_F. Si $F \neq \{0\}$, on a pour $x \in F - \{0\}$, $P_F x = x$ d'où $\|P_F x\| = \|x\|$, ce qui entraîne $\|P_F\| \geq 1$. Les deux inégalités, donnent $\|P_F\| = 1$.

(ii) Tout $x \in E$ s'écrit $x = P_F x + (x - P_F x) \in F + F^{\perp}$ d'où $E = F + F^{\perp}$.
La somme est directe car si $x \in F \cap F^{\perp}$ alors $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$, donc $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

(iii) a) Soit $x \in F^{\perp}$, comme $(x - P_F(x)) \in F^{\perp}$, alors $P_F(x) \in F \cap F^{\perp}$, d'où $P_F(x) = 0$. Réciproquement, si $x \in \ker P_F$, alors $x - 0 \in F^{\perp}$, d'où $x \in F^{\perp}$.

b) On a toujours $F \subset F^{\perp\perp}$, on va montrer l'inclusion inverse. Soit $x \in F^{\perp\perp} = (\ker P_F)^{\perp}$. Comme $(x - P_F(x)) \in F^{\perp}$ on a, $\langle x - P_F(x), x\rangle = 0$, d'autre part, comme $(x - P_F(x)) \in F^{\perp}$ et $P_F(x) \in F$ on aura $\langle x - P_F(x), P_F(x)\rangle = 0$. Ainsi, $\|x - P_F(x)\|^2 = \langle x - P_F(x), x\rangle - \langle x - P_F(x), P_F(x)\rangle = 0$ i.e. $x = P_F(x) \in F$. ■

3.3.20 REMARQUE
Dans les conditions du théorème, $I - P_F$ est la projection orthogonale sur $F^{\perp}$, où I est l'application identité de E. Les propriétés de P_F sont valables pour $(I - P_F) = P_{F^{\perp}}$.

3.3.21 COROLLAIRE
Soit F un sous-espace vectoriel **fermé** d'un espace de Hilbert H. Alors $H = F \oplus F^{\perp}$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration: En effet, F fermé et H complet, entrîne F complet. ■

Si F n'est pas fermé, le résultat précédent n'est plus vrai car $F^{\perp\perp}$ est toujours fermé. Neanmoins on a :

3.3.23 COROLLAIRE
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H. Alors

1. $F^{\perp\perp} = \overline{F}$
2. F est dense dans H si et seulement si $F^{\perp} = \{0\}$.

Démonstration: Comme $F \subset \overline{F}$, il s'en suit de (g) du Lemme 3.2.4 que $\overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp}$ et donc $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp}$. D'après le corollaire précédent, $\overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}$, et donc $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}$. D'autre part, d'après (i) du Lemme 3.2.4, $F \subset F^{\perp\perp}$, mais $F^{\perp\perp}$ est un fermé $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$. D'où $F^{\perp\perp} = \overline{F}$. ■

3.3.25 Exercice Soit H un espace de Hilbert, M un sous-espace fermé, et N un sous-espace de dimension finie de H. Montrer que $M + N$ est un sous-espace fermé de H.

3.3.26 REMARQUE
Si E est un Banach non isomorphe à un Hilbert, il existe toujours un sous-espace fermé sans supplémentaire fermé (voir le livre de Lindestrauss-Tzafriri, *Classical Banach spaces*).

3.3.27 DÉFINITION
Soit H un espace de Hilbert. Un endomorphisme $P : H \to H$ est un opérateur **auto-adjoint** (ou **hermitien**) si $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ pour tout $x, y \in H$.

3.3.28 PROPOSITION
Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. Alors

1. L'application $P_F : H \longrightarrow F$ est linéaire continue.
2. $P_F \circ P_F = P_F$ (i.e. P_F est idempotent)
3. Pour tout $x, y \in H$ on a $\langle P_F x, y \rangle = \langle x, P_F y \rangle$, donc P_F est auto-adjoint.

Démonstration: 1. On déjà vu que l'application P_F est linéaire et continue

2. Clairement, pour tout $x \in H$, on a $P_F(P_F x) = P_F x$.
3. Soient $x, y \in H$, d'après la caractérisation 3.3.3 et $P_F y \in F$ on a $\langle x - P_F x, P_F y \rangle = 0$ i.e. $\langle x, P_F y \rangle = \langle P_F x, P_F y \rangle$.
   De même $\langle P_F x, P_F y \rangle = \overline{\langle P_F y, P_F x \rangle} = \overline{\langle y, P_F x \rangle} = \langle P_F x, y \rangle$.
   Ainsi $\langle x, P_F y \rangle = \langle P_F x, y \rangle$. ■

3.3.30 Exercice Soit P un opérateur auto-adjoint d'un espace de Hilbert H tel que $P^2 = P$. Montrer que P est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé de H.

3.3.1 Le théorème de représentation de Riesz

Les espaces de Hilbert possèdent des propriétés de dualités remarquables. Soit H un espace de Hilbert, pour $y \in H$ on associe la forme linéaire sur H, $\phi_y : H \to \mathbb{C}$ définie par $\phi_y(x) = \langle x, y \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|\phi_y(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|y\| \|x\|$ d'où la forme linéaire ϕ_y est continue et $\|\phi_y\| \leq \|y\|$.

On définit alors une application $\Phi : H \to H'$, qui à $y \in H$ associe $\Phi(y) = \phi_y$.

3.3.31 THÉORÈME (LE THÉORÈME DE REPRÉSENTATION DE RIESZ)
Soit H un espace de Hilbert. Alors

1) L'application Φ est une isométrie i.e. pour tout $y \in H$, $\|\Phi(y)\| = \|y\|$.
2) Soit f est forme linéaire continue i.e. $f \in H'$, alors il existe un unique $y \in H$ tel que $f = \phi_y$ et $\|f\| = \|y\|$.

Démonstration: 1) Il suffit de supposer que $y \neq 0$, alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $\|\phi_y\| \leq \|y\|$, d'autre part $\phi_y(y) = \|y\|^2$, entraîne $\|\phi_y\| \geq \|y\|$, d'où $\|\phi_y\| = \|y\|$.

2) Soit $f \in H'$, si $f = 0$, alors $f = \phi_0$. Si $f \neq 0$, on pose $F = \ker f$, comme f est continue $\ker f$ est un sous-espace vectoriel fermé (strict) de H.
Soit $x_0 \in H \setminus F$. On pose $u = x_0 - P_F(x_0)$. Comme $u \in F^{\perp} - \{0\}$, $\ker \phi_u$ est un hyperplan fermé strict et contient F donc $\ker \phi_u = F$. Par suite, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \phi_u$. Il s'ensuit que $f(u) = \lambda \|u\|^2$, doù $\lambda = \frac{f(u)}{\|u\|^2}$. On pose $y = \overline{\frac{f(u)}{\|u\|^2}} u$.
Alors $f = \phi_y$. ■

3.3.33 COROLLAIRE
Soit H un espace de Hilbert. L'application $\Phi : H \to H'$, $y \mapsto \Phi(y)$ définie par : pour tout $x \in H$, $\Phi(y)(x) = \langle x, y \rangle$ est une isométrie bijective et antilinéaire de H sur H'.
Si H est réel, c'est un isomorphisme isométrique de H sur H'.

3.3.34 COROLLAIRE
Tout espace de Hilbert est réflexif.

Adjoint d'un opérateur

Soient H et K deux espaces de Hilbert et $A \in \mathscr{L}(H, K)$ i.e une application linéaire continue.

Il existe une unique application linéaire continue $A^* \in \mathscr{L}(K, H)$ telle que pour tout $x \in H$ et $y \in K$ on a :

$$\langle Ax, y \rangle_K = \langle x, A^* y \rangle_H$$

De plus $\|A^*\| = \|A\|$ et $A^{**} = A$.

L'application A^* est appelée l'application **adjointe** de A (ou l'opérateur adjoint de l'opérateur A).

Démonstration: Soit $y \in K$ fixé, l'application de $H \to \mathbb{C}$ définie par $x \mapsto \langle Ax, y \rangle_K$ est une forme linéaire continue, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément de H, noté $A^* y$ tel que $\langle Ax, y \rangle_K = \langle x, A^* y \rangle_H$. Grâce à l'unicité, on définit ainsi une application $A^* : K \to H$. En utilisant encore l'unicité, on montre que A^* est linéaire.

On va maintenant établir sa continuité. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$|\langle x, A^* y \rangle_H| = |\langle Ax, y \rangle_K| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|x\| \|y\|.$$

D'où la norme de la forme linéaire $x \mapsto \langle x, A^* y \rangle_H$, à savoir $\|A^* y\| \leq \|A\| \|y\|$. On en déduit la continuité de A^* et l'inégalité $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Maintenant par unicité de l'opérateur adjoint, on aura $A^{**} = (A^*)^* = A$ et d'après ce qui précède $\|A\| = \|A^{**}\| \leq \|A^*\|$, d'où $\|A^*\| = \|A\|$. ■

Les théorème de Lax-Milgram et de Stampacchia

Soit H un espace de Hilbert et $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire (ou bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

1) f est continue, s'il existe $C > 0$, telle que $|f(x,y)| \leq C\|x\|.\|y\|$ pour tous x et y in H.

2) On dit que f est *Coercive* s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$f(x,x) \geq \alpha\|x\|^2$$

pour tout $x \in H$.

3.3.36 THÉORÈME (DE STAMPACCHIA)
Soit H un espace de Hilbert et $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive, et C un convexe fermé non vide de H. Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique u dans C tel que : pour tout $v \in C$ on a

$$\operatorname{Re} f(u, v-u) \geq \operatorname{Re} \overline{\varphi}(v-u).$$

De plus, si f est hermitienne (ou symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) alors u est l'unique élément de C tel que

$$\frac{1}{2}f(u,u) - \operatorname{Re} \overline{\varphi}(u) = \min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2}f(v,v) - \operatorname{Re} \overline{\varphi}(v) \right\}$$

Démonstration: Puisque φ et $v \mapsto \overline{f(u,\ v)}$, pour tout u dans, sont des formes linéaires continues sur H, par le théorème de représentation de Riesz 3.3.31, il existe un unique a dans H et, pour tout u dans H, un unique élément noté Au dans H tels que, pour tous u, v dans H, on ait

$\varphi(v) = \langle v, a \rangle$ et $f(u,\ v) = \langle Au,\ v \rangle$.

Alors, $f(u, Au) = \|Au\|^2 \leq C\|u\|\|Au\|$, d'où $\|Au\| \leq C\|u\|$ et par unicité $A : H \to H$ est linéaire, ainsi $A \in \mathscr{L}(H)$.

On veut montrer que pour tout $v \in C$ on a

$$\operatorname{Re} f(u, v-u) \geq \operatorname{Re} \overline{\varphi}(v-u)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\langle Au,\ v-u \rangle \geq \operatorname{Re}\langle a, v-u \rangle$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\langle a - Au,\ v-u \rangle \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\langle \rho a - \rho Au,\ v-u \rangle \leq 0 \text{ pour tout } \rho > 0$$

Mais par le théorème de la projection, $\mathrm{Re}\langle(\rho a - \rho Au + u) - u,\ v - u\rangle \leq 0$ pour tout $v \in C$, est equivalent à $u = P_C(\rho a - \rho Au + u)$ i.e. l'application $g : C \to C$ définie par $g(u) = P_C(\rho a - \rho Au + u)$ a un unique point fixe.

Comme C est complet, il suffit de montre que g est strictement contractante. Alors, comme P_C est 1-lipschitzienne,

$$||g(u) - g(u')||^2 = \|P_C(\rho a - \rho Au + u) - P_C(\rho a - \rho Au' + u')\| \leq ||u - u' - \rho A(u - u')||^2$$

$$= ||u - u'||^2 - 2\rho\langle A(u - u'), u - u'\rangle + \rho^2||A(u - u')||^2$$

En utilisant $||A(x)|| \leq C||x||\, et\ \langle A(x),\ x\rangle \geq \alpha||x||^2 onobtient$:

$$||g(u) - g(u')||^2 \leq ||u - u'||^2 - 2\rho\alpha||u - u'||^2 + \rho^2C^2||u - u'||^2 = (1 - 2\rho\alpha + \rho^2C)||u - v||^2$$

Alors, si on choisit ρ assez petit, par exemple $\rho \in]0, \dfrac{2\alpha}{C^2}[$, $0 < (1 - 2\rho\alpha + \rho^2C) < 1$, et l'application g sera alors strictement contractante, et la première assertion du théorème en découle.

Supposons maintenant que la forme sesquilinéaire f hermitienne (ou symétrique si $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$). Pour tout $v \in C$ on écrit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\,\overline{\varphi}(u - v) &\leq \frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\, f(u, u - v) \\
&\leq -\frac{1}{2}f(u,u) - \frac{1}{2}f(v,v) + \mathrm{Re}\, f(u,v) \\
&\leq -\frac{1}{2}f(u - v, u - v) \leq 0
\end{aligned}$$

D'où pour tout $v \in C$, $\frac{1}{2}f(u,u) - \mathrm{Re}\,\overline{\varphi}(u) \leq \frac{1}{2}f(v,v) - \mathrm{Re}\,\overline{\varphi}(v)$ le résultat en découle. ∎

Le théorème de Lax-Milgram est un cas particulier du théorème de Stampacchia (prendre $C = H$).

3.3.38 THÉORÈME (DE LAX-MILGRAM)

Soit H un espace de Hilbert et $f : H \times H \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire continue et coercive. Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique u dans H tel que : pour tout $v \in H$ on a

$$f(u,v) = \overline{\varphi}(v).$$

De plus, si f est hermitienne (ou symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) alors u est l'unique élément de H tel que

$$\frac{1}{2}f(u,u) - \overline{\varphi}(u) = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}f(v,v) - \overline{\varphi}(v)\right\}$$

Démonstration: D'après le théorème de Stampacchia, il existe un unique $u \in H$ tel que pour tout $v \in H$ on a $\operatorname{Re} f(u, v-u) \geq \operatorname{Re} \overline{\varphi}(v-u)$. En écrivant $w = v - u$, on obtient que pout tout $w \in H$, $\operatorname{Re} f(u, w) \geq \operatorname{Re} \overline{\varphi}(w)$. Alors, $\operatorname{Re} f(u, -w) \geq \operatorname{Re} \overline{\varphi}(-w)$ i.e. $\operatorname{Re} f(u, w) \leq \operatorname{Re} \overline{\varphi}(w)$, parsuite $\operatorname{Re} f(u, w) = \operatorname{Re} \overline{\varphi}(w)$. En remplaçant w par iw on obtient que $\operatorname{Im} f(u, w) = \operatorname{Im} \overline{\varphi}(w)$, d'où $f(u, w) = \overline{\varphi}(w)$. Ce qui montre la première assertion. La seconde de la même manière que dans le théorème précédent. ∎

3.3.2 Systèmes orthonormés et bases hilbertienne

3.3.40 DÉFINITION
Un système $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace préhilbertien$E$ sur $\mathbb{K}$ est un **système orthogonal** si pour tout $i \neq j$ on a $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.

3.3.41 DÉFINITION
Un système orthogonal $\{x_i\}_{i \in I}$ de vecteurs d'un préhilbertien$E$ est un **système orthonormé** si $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

3.3.42 EXEMPLE. Dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) muni du produit scalaire standard le système $\{e_1, \cdots, e_n\}$,où $e_k = (\delta_{k,n})_{k \in \{1,\ldots,n\}}$ et $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (le symbole de Kronecker) est un système orthonormé

3.3.43 EXEMPLE. L'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k}$, le système $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donné par $e_n = (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$, est un système orthonormé.

3.3.44 EXEMPLE. Pour l'espace de Hilbert $L^2([a, b], \mathbb{C})$, muni du produit scalaire $\langle x, y \rangle = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b x(t) \overline{y(t)}\, dt$, le système $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée ; où la fonction $e_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ est définie par $e_n(t) = e^{in\omega t}$ où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

3.3.45 PROPOSITION
Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ un système orthonormé d'un préhilbertien E où I est un ensemble fini. On pose $F = \operatorname{Vect}\{e_i\}_{i \in I}$.

Alors pour tout $x, y \in E$ on a :

1. $P_F x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$
2. $\|P_F x\|^2 = \sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$
3. $\langle P_F x, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$

Démonstration: Pour tout $x \in E$, on pose $Px := \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$. Alors, pour tout $y \in E$ on a $\langle Px, y\rangle = \langle \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}$.

En particulier, pour tout $j \in I$, $\langle Px, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle$, d'où $\langle x - Px, e_j\rangle = 0$, par suite $\langle x - Px, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$, d'après le théorème de la projection hilbertienne $P = P_F$. D'où, $\|P_F x\|^2 = \langle P_F x, P_F x\rangle = \sum\limits_{i\in I}\langle P_F x, e_i\rangle\langle e_i, P_F x\rangle = \sum\limits_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle x, e_i\rangle} = \sum\limits_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2$. ■

3.3.47 PROPOSITION (L'INÉGALITÉ DE BESSEL)

Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormé d'un préhilbertien E. Alors

(a) Pour tout $x \in E$ et tout sous-ensemble fini $J \subset I$ on a

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle e_i|^2 + \|x - \sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2.$$

(b) Pour tout $x \in E$, la famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et on a l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Démonstration: (a) On écrit $x_\parallel = \sum\limits_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i$ et $x_\perp = x - x_\parallel$.

Alors, $x_\parallel \perp x_\perp$ et comme $x = x_\parallel + x_\perp$ on aura $\|x\|^2 = \|x_\parallel\|^2 + \|x_\perp\|^2$.

(b) D'après (a), pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$ on a

$$\sum_{i\in J}|\langle x, e_i\rangle|^2 = \|\sum_{i\in J}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 \leq \|x\|^2,$$

d'où la famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et $\sum\limits_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$, ■

3.3.49 COROLLAIRE

Soit H un espace de Hilbert et $\{e_i\}_{i\in I}$ un système orthonormé. Alors, pour tout $x \in H$, la famille orthonormée $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable et $\|\sum\limits_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2 \leq \|x\|^2$,

---

Démonstration: D'après la proposition précédente, la famille $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et comme H est complet, d'après 3.4.27 la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est alors sommable et $\sum\limits_{i\in I}|\langle x, e_i\rangle|^2 = \|\sum\limits_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\|^2$ ■

Base hilbertienne

3.3.51 DÉFINITION
Soit E un espace préhilbertien. Une famille $\{e_i\}_{i\in I}$ de E est une **base hilbertienne** de E si elle est **orthonormée et totale**.

3.3.52 REMARQUE
Si H est un espace de Hilbert alors un sytème orthonormé $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne si et seulement si $\begin{cases}\langle x, e_i\rangle = 0 \\ \text{pour tout } i \in I\end{cases} \Rightarrow x = 0.$

En effet, si $\langle x, e_i\rangle = 0$, pour tout $i \in I$, alors $x \in (\mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I}}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.
Réciproquement, la condition entraîne que
$(\mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I}}^{\perp} = \{0\}$. Comme $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I}} \bigoplus \overline{\mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I}}^{\perp}$ on aura nécessairement $H = \overline{\mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I}}$.

3.3.53 THÉORÈME (CARACTÉRISATIONS DES BASES HILBERTIENNES)
Soit H un espace de Hilbert et $\{e_i\}_{i\in I}$ une famille orthonormée.
Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $\{e_i\}_{i\in I}$ est une base hilbertienne.
2) Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$
3) Pour tout $x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}$
4) Tout $x \in H$, satisfait l'identité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

Démonstration: "1) $\Rightarrow$ 2)" Soient $x \in H$ et $\varepsilon > 0$, alors il existe $y_\varepsilon \in \mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I}$ tel que $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Il existe donc $J_\varepsilon \subset I$, J_ε fini et $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i \in J_\varepsilon$, tels que $y_\varepsilon = \sum_{i\in J_\varepsilon} \lambda_i e_i$.

On pose $F_\varepsilon = \mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in J_\varepsilon}$, alors $\dim F_\varepsilon < \infty$ et $P_{F_\varepsilon}(x) = \sum_{i\in J_\varepsilon} \langle x, e_i\rangle e_i$, d'après la proposition 3.3.45 et alors $\|x - \sum_{i\in J_\varepsilon} \langle x, e_i\rangle e_i\| \le \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. D'où la famille $(\langle x, e_i\rangle e_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i = x$.

"2) $\Rightarrow$ 3)" Soient $x \in H$, $\varepsilon > 0$. Soit $y \in H - \{0\}$ alors il existe $J_\varepsilon \subset I$, J_ε fini, tel que $\|x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle e_i\| \leq \frac{\varepsilon}{\|y\|}$. D'où

$$|\langle x, y\rangle - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}| = |\langle x, y\rangle - \langle \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle e_i, y\rangle| \leq \|x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, e_i \rangle e_i\| \|y\| < \varepsilon.$$

"3) $\Rightarrow$ 4)", Il suffit de prendre $y = x$

"4) $\Rightarrow$ 1)", Si $x \in \overline{vect\{e_i\}_{i \in I}}^{\perp}$, d'après 4), $\|x\| = 0$, i.e. $x = 0$, ceci entraîne que $\overline{vect\{e_i\}_{i \in I}}^{\perp} = \{0\}$ et donc $\overline{vect\{e_i\}_{i \in I}} = \{0\}^{\perp} = H$ d'après la remarque 3.3.52. ■

On va maintenant montrer l'existence de base hilbertienne pour tout espace de Hilbert (même s'il n'est pas séparable). Ce résultat utilise le lemme de Zorn (voir 1.1.19).

3.3.55 Théorème

Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.

De plus, tout système orthonormé d'un espace de Hilbert est contenu dans une base hilbertienne.

Démonstration: On suppose que l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit L un système orthonormé de $\mathscr{H}$. On désigne par $\mathscr{B}$ l'ensemble des systèmes orthonormés de $\mathscr{H}$ qui contiennent L, qu'on ordonne par l'inclusion ($\subset$). Alors $\mathscr{B}$ n'est pas vide, puisqu'il contient L.

Montrons que $(\mathscr{B}, \subset)$ est inductif. Soit $\mathscr{C} = \{B_i, i \in I\}$ une partie totalement ordonnée de $(\mathscr{B}, \subset)$

Alors pour montrer que $\bigcup_{i \in I} B_i$ est un majorant, il suffit de montrer que $\bigcup_{i \in I} B_i$ est un sytème orthonormé. En effet, soit $x, y \in \bigcup_{i \in I} B_i$, $x \neq y$, alors il existe $j \in I$ tel que $x, y \in B_j$, d'où $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\langle x, y \rangle = 0$, ainsi on a montrer que $\bigcup_{i \in I} B_i$ est un sytème orthonormé.

D'après le lemme de Zorn, il existe un élément maximal B dans $\mathscr{B}$. Alors B est une base hilbertienne de $\mathscr{H}$, Il suffit de montrer que B est total i.e $\overline{\mathrm{Vect}(B)} = \mathscr{H}$. Sinon, $\mathscr{H} \neq \overline{\mathrm{Vect}(B)}$ et donc $\overline{\mathrm{Vect}(B)}^{\perp} \neq \{0\}$. Soit $x_0 \in \overline{\mathrm{Vect}(B)}^{\perp}$ un vecteur de norme 1. Alors, $B \cup \{x_0\}$ est un sytème orthonormé qui contient strictement B, ceci contredit le caractère maximal de B. Donc B est total et par suite une base hilbertienne de $\mathscr{H}$.

3.3.57 Proposition

Dans un espace de Hilbert deux bases hilbertiennes sont équipotentes.
Leur cardinal est appelé *la dimension hilbertienne* de l'espace de Hilbert.

Démonstration: Soit $\mathscr{H}$ un espace de hilbert de dimension infinie. Soient B et B' deux bases de $\mathscr{H}$. Pour tout $e \in B$, l'ensemble $D_e = \{f \in B'; \langle e, f\rangle \neq 0\}$ est dénombrable d'après 3.4.16, car $e = \sum_{f \in B'} \langle e, f\rangle f$. D'autre part pour tout $f \in B'$, il existe $e \in B$ tel que $\langle e, f\rangle \neq 0$, car $f = \sum_{e \in B} \langle f, e\rangle f \neq 0$. Ainsi $B' = \bigcup_{e \in B} D_e$, il existe donc une injection de B' dans $\mathbb{N} \times B$. Comme $\mathbb{N} \times B$ est équipotent B (car B est infini, voir 3.4.38), il existe donc une injection de B' dans B. Un raisonnement identique donne une injection de B dans B'. Finalement, le théorème de Cantor-Bernstein 3.4.34 donne une bijection de B sur B'. ∎

3.3.59 EXEMPLE. Soit I est un ensemble on munit, $\ell^2(I, \mathbb{K}) = \{(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \mid (|x_i|^2)_{i \in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}\}$ du produit scalaire $\langle (x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}\rangle = \sum_{i \in I} x_i \overline{y_i}$. Alors, $\ell^2(I, \mathbb{K})$ est un espace de Hilbert non séparable.
Une base hilbertienne de $\ell^2(I, \mathbb{K})$ est donnée par la famille de vecteurs $\{e_i\}_{i \in I}$ avec $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$ et $\delta_{ii} = 1$.

3.3.60 THÉORÈME
Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert de dimension hilbertienne I et soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une base hilbertienne. Alors, l'application $\varphi : \mathscr{H} \to \ell^2(I, \mathbb{K})$, définie par $\varphi(x) = \{\langle x, e_n\rangle\}_{i \in I}$ est un isomorphisme isométrique.

On va considérer le cas particulier des espaces de Hilbert séparables.

Etant donnée une suite libre $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace préhilbertien E on voudrait construire une suite orthonormée $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on ait Vect $\{e_0, \ldots, e_p\} =$ Vect $\{f_0, \ldots, f_p\}$, ceci est donné par :

3.3.61 THÉORÈME (LE PROCÉDÉ D'ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT)
Soit H un espace préhilbertiende dimension infinie.
Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite libre de vecteurs de H. On pose pour $p \in \mathbb{N}$, $V_p :=$ Vect$\{f_0, \ldots, f_p\}$. Alors, la suite $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par une récurrence : $e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$ et pour $p \geq 1$, $e_p = \frac{f_p - P_{V_{p-1}}(f_p)}{\|f_p - P_{V_{p-1}}(f_p)\|}$ est une suite orthonormée telle que vect$\{e_0, \ldots, e_p\} = V_p$.

En fait, on a pour $p \geq 0$, $e_{p+1} = \dfrac{f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p} \langle f_p, e_i\rangle f_i}{\|f_{p+1} - \sum_{i=0}^{p} \langle e_p, e_i\rangle f_i\|}$.

Démonstration: On raisonne par récurrence : comme la suite est libre $f_0 \neq 0$ par suite $e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$ vérifie bien $\|e_0\| = 1$. Supposons que $e_0, \ldots, e_p$ sont déjà obtenus et que $V_p = \text{Vect}\{e_0, \ldots, e_p\}$. Soit $P_{V_p}(f_{p+1})$ la projection orthogonale de f_{p+1} sur V_p, d'après la caractérisation de la projection on a $\langle f_{p+1} - P_{V_p}(f_{p+1}), y\rangle = 0$ pour tout $y \in V_p$, en particulier, $f_{p+1} - P_{V_p}(f_{p+1})$ est orthogonal aux vecteurs $e_0, \ldots, e_p$ et en posant $e_{p+1} = \frac{f_{p+1} - P_{V_p}(f_{p+1})}{\|f_{p+1} - P_{V_p}(f_{p+1})\|}$, on obtient un système orthonormé $e_0, \ldots, e_{p+1}$. Il reste à determiner $P_{V_p}(f_{p+1})$ dans la base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_p\}$. Si on écrit $P_{V_p}(f_{p+1}) = \sum_{0=1}^{p} \lambda_i e_i$, alors $\langle P_{V_p}(f_{p+1}), e_i\rangle = \lambda_i$ et de la caractérisation précédente on a $\langle P_{V_p}(f_{p+1}), e_i\rangle = \langle f_{p+1}, e_i\rangle$, finalement $P_{V_p}(f_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=0}^{p} \langle f_{p+1}, e_i\rangle e_i$. ∎

3.3.63 EXEMPLE. Soit $H = C^0([-1,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 p(x) f(x) g(x)\, dx$ avec $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La suite orthonormée obtenue, par le procèdeé de Gram-Schmidt à partir de la suite des monômes $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ est la suite des polynômes de Tchebychev $P_n = \cos(n \text{Arcos}(x))$, $n \in \mathbb{N}$.

3.3.64 THÉORÈME

Un espace préhilbertienest séparable si et seulement s'il admet une base hilbertienne dénombrable.

Dans ce cas toutes les bases hilbertiennes sont dénombrables.

Démonstration: Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans H. On se ramener au cas où la suite est libre. Soit $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite libre de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \text{Vect}\{u'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors, $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est alors totale.

D'après le procédé de Gram-Schmidt 3.3.61, il existe une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{vect}\{e_0, \cdots, e_n\} = \text{vect}\{u'_0, \cdots, u'_n\}$. Comme $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est totale il en est de même pour $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Réciproquement, si H a une base hilbertienne dénombrale, alors H admet une suite totale, il est donc séparable (voir 2.2.47). ∎

Tout espace euclidien de dimension n est isométriquement isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Le théorème suivant étend ce résultat aux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie.

3.3.66 THÉORÈME

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Alors, l'application $\varphi : \mathscr{H} \to \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, définie par $\varphi(x) = (\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est un isomorphisme isométrique.

Démonstration: Soit $x \in \mathscr{H}$, d'après l'identité de Parseval
$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|\varphi(x)\|_2^2.$$
en en déduit que φ est bien définie, i.e. $\varphi(x) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et qu'elle préserve la norme. Pour tout $x, y \in \mathscr{H}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,
$$\begin{aligned}\varphi(\alpha x + \beta y) &= (\langle \alpha x + \beta y, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\langle x, e_n\rangle + \beta\langle y, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= \alpha(\langle x, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(\langle y, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y),\end{aligned}$$
d'ou φ est linéaire. Donc φ est une isométrie linéaire.
Il reste à montrer que φ est surjective.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k e_k$. Alors $\|S_n - S_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n}^{n+p} |a_k|^2$ qui vers 0 lorsque n tends vers $+\infty$, conséquence de la convergence de $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2$. Alors, par complétude, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathscr{H}$ vers $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n$. D'où $\varphi(x) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi φ est un isomorphisme linéaire et isométrique. ■

3.3.68 EXEMPLE. Soit $a < b$. On pose $T = b - a$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On munit $L^2([a,b], \mathbb{C})$ du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n, la fonction T-périodique, définie par $e_n(t) = e^{i\omega n t}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors

3.3.69 PROPOSITION
La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([a,b], \mathbb{C})$.
Ainsi, $L^2([a,b], \mathbb{C})$ est isométriquement isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Démonstration: La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.
En effet,
$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{T}\int_a^b e_n(t)\overline{e_m(t)}dt = \frac{1}{T}\int_a^b e^{i\omega(n-m)t}dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m\\ \frac{1}{T}\left[\frac{e^{i\omega(n-m)t}}{i\omega(n-m)}\right]_a^b = 0 & \text{si } n \neq m\end{cases}$$
Il reste à montrer qu'elle est totale.
Soit $f \in L^2([a,b], \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de densité, il existe $g \in C([a,b], \mathbb{C})$ telle que $\|f - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On peut supposer, quitte à modifier g au voisinage des points a et b que $g(a) = g(b) = 0$. On prolonge g par T-périodicité à $\mathbb{R}$, on obtient ainsi un élément de $\mathscr{C}_{T\text{-}per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après la proposition 1.4.44, l'ensemble des polynômes trigonométrique $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathscr{C}_{T\text{-}per}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit P est un polynôme trigonométrique tel que $\|g - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Alors, $\|f - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
D'où $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $L^2([a,b], \mathbb{C})$. ■

3.4 Applications

3.4.1 Séries de Fourier

Soit T un réel > 0. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite de période T ou T-périodique si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors, $f(x+nT) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Il est souvent plus commode de voir les fonctions de période T comme des fonctions sur l'espace quotient $\mathbb{T} = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ sur $T\mathbb{Z}$ par la relation $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in T\mathbb{Z}$ i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + nT$.

Soit $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ l'application qui associe à un point de $\mathbb{R}$ sa classe d'équivalence modulo $T\mathbb{Z}$.

Alors si $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction T-périodique, il existe une unique fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$. Réciproquement, étant donné une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ alors $\tilde{f} = f \circ \pi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction T-périodique. Ainsi les fonctions sur $\mathbb{T}$ correspondent aux fonctions sur $\mathbb{R}$ admettant la période T ; ou encore aux fonctions f définies sur un intervalle $[a, a+T]$ telles que $f(a) = f(a+T)$ quel que soit a.

$\mathbb{T}$ est muni de la topologie quotient i.e. la topologie telle que $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; ainsi l'espace $C(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ s'identifie avec l'espace des fonctions continues et T-périodiques sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité. L'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ définie par $\phi(t) = e^{i\omega t}$ est surjective continue où $\omega = \frac{2\pi}{T}$. L'application induite $\psi : \mathbb{T} \to \mathbb{S}^1$ qui à la classe d'équivalence de $t \in \mathbb{R}$ associe $e^{i\omega t}$ est une bijection continue donc un homéomorphisme car $\mathbb{T}$ est compact, et $\psi \circ p = \phi$ i.e. le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{S}^1 \\ & \mathbb{T} \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Ainsi pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et continue il existe une unique fonction continue $\tilde{f} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \tilde{f}(e^{i\omega t})$.

Polynômes trigonométriques

Soit $T > 0$, on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n, la fonction T-périodique de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie par $e_n(t) := e^{i\omega n t}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; un polynôme trigonométrique de degré n est une expression de la forme $\sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k$ avec $\lambda_k \in \mathbb{C}$ et λ_n ou $\lambda_{-n} \neq 0$. On note par $\mathscr{P}_n = Vect\{e_k \,|\, 0 \leq k \leq n\}$ l'espace des polynômes trigonométriques de degré $\leq n$ et par $\mathscr{P}$ l'espace des polynômes trigonométriques i.e. $\mathscr{P} = \bigcup_{n\geq 0} \mathscr{P}_n$.

3.4.1 DÉFINITION (COEFFICIENTS DE FOURIER)

On définit les coefficients de Fourier de f pour une fonction intégrable, $\widehat{f}(n)$, par :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega nt}\,dt, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La suite $\left(\widehat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est appelée la suite des coefficients de Fourier de f.

La série de Fourier de f est la série $Sf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e_n$ et la suite des sommes partielles $S_N f = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e_n$.

La série de Fourier de f est convergente si la suite des sommes partielles $(S_n f)$ converge.

3.4.2 REMARQUE

Si f est une fonction paire i.e. $f(-x) = f(x)$ alors $\widehat{f}(-n) = \widehat{f}(n)$ et sa série de Fourier peut s'écrire $Sf(x) = \widehat{f}(0) + 2\sum_{n\geq 1} \widehat{f}(n)\cos\omega nx$ Si f est une fonction impaire i.e. $f(-x) = -f(x)$ alors $\widehat{f}(-n) = -\widehat{f}(n)$ et sa série de Fourier peut s'écrire $Sf(x) = 2i\sum_{n\geq 1} \widehat{f}(n)\sin\omega nx$

3.4.3 PROPOSITION

Pour $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^p(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$|\widehat{f}(n)| \leq \|f\|_p$$

les coefficients de fouriers sont bien définis.

Démonstration: Soit q l'exposant conjugué de p, alors l'inégalité de Hölder et $|e^{-i\omega nt}| = 1$, nous donne :

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)e^{-i\omega nt}|\,dt \leq \|f\|_p\|e_{-n}\|_q = \|f\|_p.$$

On va étudier les questions suivantes :

- Sous quelles conditions la suite des coefficients de Fourier est un élément de $\ell^2(\mathbb{Z})$?
- La suite $(S_N f)_{N\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? si oui, dans quelle sens ?
- sous quelles conditions (et dans quel sens) a-t-on l'égalité

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e_n$$

3.4.2 Série de Fourier d'une fonction de $L^2([a,b],\mathbb{C})$

Soit $a < b$. On pose $T = b - a$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On munit $L^2([a,b],\mathbb{C})$ du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n, la fonction T-périodique, definie par $e_n(t) = e^{i\omega nt}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors

3.4.5 THÉORÈME
La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2([a,b],\mathbb{C})$.

Démonstration: La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.
En effet,

$$\langle e_n, e_m\rangle = \frac{1}{T}\int_a^b e_n(t)\overline{e_m(t)}dt = \frac{1}{T}\int_a^b e^{i\omega(n-m)t}dt = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ \frac{1}{T}\left[\frac{e^{i\omega(n-m)t}}{i\omega(n-m)}\right]_a^b = 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Il reste à montrer qu'elle est totale.
Soit $f \in L^2([a,b],\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de densité, il existe $g \in C([a,b],\mathbb{C})$ telle que $\|f-g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On peut supposer, quitte à modifier g au voisinage des points a et b que $g(a) = g(b) = 0$. On prolonge g par T-périodicité à $\mathbb{R}$, on obtient ainsi un élément de $\mathscr{C}_{T\text{-}per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. D'après la proposition 1.4.44, l'ensemble des polynômes trigonométrique $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathscr{C}_{T\text{-}per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Soit P est un polynôme trigonométrique tel que $\|g-P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Alors, $\|f-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-P\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
D'où $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $L^2([a,b],\mathbb{C})$. ∎

En identifiant une fonction T-périodique, $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ avec sa restriction sur l'intervalle $[0,T]$ on a comme conséquence du théorème précédent et des propriétés d'une base hilbertienne :

3.4.7 THÉORÈME
L'application $\Phi : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, $f \mapsto (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme isométrique donc linéaire bijective et pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}(n)\|_2$. Autrement dit, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et telle que $\int_0^T |f(t)|^2\,dt < +\infty$ on a :

(i) $f(t) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{i\omega nt}$ dans $L^2(\mathbb{T})$, i.e. $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \|f - S_N f\|_2 = 0$,

où $S_N f = \displaystyle\sum_{-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{i\omega nt}$, $\quad N \in \mathbb{N}$.

(ii) l'identité de Parseval : $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2$.

(iii) Pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ on a $\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}$.

3.4.8 REMARQUE

Ce résultat ne dit rien sur la convergence simple de la série de Fourier d'une fonction de $L^2(\mathbb{T})$, on a pour cela le théorème suivant :

3.4.9 THÉORÈME (CARLESON(1965))

Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, la série de Fourier de f converge pour presque tout x vers f.

D'autres conséquences de l'existence d'une base hilbertienne

3.4.10 PROPOSITION

Tout espace de Hilbert de dimension infinie admet un sous-espace isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$.

Démonstration: En effet, un espace de Hilbert de dimension infinie, admet une base hilbertienne (infinie) et donc une suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $E = \overline{\mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ est alors isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$. ∎

En retrouve un résultat valable pour les espaces de Banach, dans le cas des espace de Hilbert, mais sans utilisé le théorème de Baire.

3.4.12 COROLLAIRE

Si un espace de Hilbert admet une base de Hamel au plus dénombrable, alors il est de dimension finie.

Démonstration: Si l'espace de Hilbert est de dimension infinie, il admet d'après la proposition un sous-espace isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$. Il suffit de montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ n'admet pas de base de Hamel dénombrable.
Pour $\alpha \in]0,1[$ On pose $x_\alpha = (1, \alpha, \ldots, \alpha^n, \ldots)$. Alors $x_\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$ et la famille (non dénombrale) $\{x_\alpha\}_{\alpha\in]0,1[}$, est une famille libre de $\ell^2(\mathbb{N})$, ce qui entraîne qu'une base de Hamel de $\ell^2(\mathbb{N})$ ne peut pas être dénombrable. En effet, $\|x_\alpha\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{2n} =$

$\dfrac{1}{1-\alpha^2} < +\infty$, on a bien $x_\alpha \in \ell^2(\mathbb{N})$. Soit maintenant, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ et α_i distincts tels que $\sum_{i=1}^{k} x_{\alpha_i} = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n = 0$.

En particulier, en considérant, $0 \leq n \leq k-1$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_{k-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_{k-1}^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui a pour unique solution $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, car les α_i sont distincts et que la matrice de Vandermonde a pour déterminant $\prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$. ■